QUESTION 1 *(15 points)*

Sur un oscillateur élémentaire, avec raideur k, masse m et coefficient d'amortissement c, on applique une force périodique, ayant la formule :

$$f(t) = 4F_0\cos(\omega t)\sin^2(\omega t)$$

i) Décomposer la force $f(t)$ selon ses harmoniques, en calculant F_n et ψ_n. ....(3 pts)

ii) Calculer les harmoniques du déplacement, avec X_n et φ_n, en fonction des paramètres du système. ....(5 pts)

iii) Calculer la valeur de la fréquence ω pour laquelle la valeur du premier harmonique du déplacement X_1 est égale à la valeur du troisième harmonique divisé par neuf $\left(\frac{X_3}{9}\right)$.(7 pts)

Formules d'aide :

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2} \qquad \sin(A)\cos(B) = \frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{2}$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2} \qquad \cos(A)\sin(B) = \frac{\sin(A+B)-\sin(A-B)}{2}$$

Solution

(i)

$$f(t) = 4F_0\cos(\omega t)\sin^2(\omega t) = F_0(\cos(\omega t)-\cos(3\omega t))$$
$$F_1 = F_3 = F_0;\psi_1 = 0;\psi_3 = \pi$$

(ii) Pour calculer maintenant les harmoniques du déplacement on utilise les formules développées dans le cours, mais en faisant la substitution des paramètres calculés dans la partie précèdent. :

$X_1 = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\eta\beta)^2}}$	$\tan(\varphi_1) = \frac{2\eta\beta}{1-\beta^2}$
$X_3 = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-9\beta^2)^2+(6\eta\beta)^2}}$	$\tan(\varphi_3) = \frac{6\eta\beta}{1-9\beta^2}$

(iii)

$$\frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-9\beta^2)^2+(6\eta\beta)^2}} = \frac{1}{9k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\eta\beta)^2}}$$

$$(1-\beta^2)^2+(2\eta\beta)^2 = \frac{1}{81}((1-9\beta^2)^2+(6\eta\beta)^2)$$

$$1-2\beta^2+\beta^4+4\eta^2\beta^2 = \frac{1}{81}-\frac{2\beta^2}{9}+\beta^4+\frac{4}{9}\eta^2\beta^2 \rightarrow \beta^2\left(-2+\frac{2}{9}+\left(4-\frac{4}{9}\right)\eta^2\right) = -\frac{80}{81}$$

$$\beta^2 = \frac{80}{81}\frac{1}{\left(\frac{16}{9}-\frac{32}{9}\eta^2\right)} = \frac{5}{9(1-2\eta^2)}$$

QUESTION 2 (10 points)

Le système dans la Figure 2.1.a reçoit des vibrations externes à deux fréquences : $\omega_{ext,1}^2 = 0.9\omega_0^2$ et $\omega_{ext,2}^2 = 1.1\omega_0^2$, où ω_0 est la pulsation propre du système original. On veut limiter l'amplitude de vibration du système avec un amortisseur de Frahm en version conservative (Figure 2.1.b) avec les conditions suivantes : la pulsation propre de l'oscillateur secondaire est la même que celle de l'oscillateur principal, l'amplitude du système final est 40 fois plus petite que l'amplitude du système original (Figure 2.1.a). Calculer :

- **i)** **Le rapport entre les masses m_2/m_0.**
- **ii)** **L'amplitude de la masse secondaire par rapport à l'amplitude du système original.**

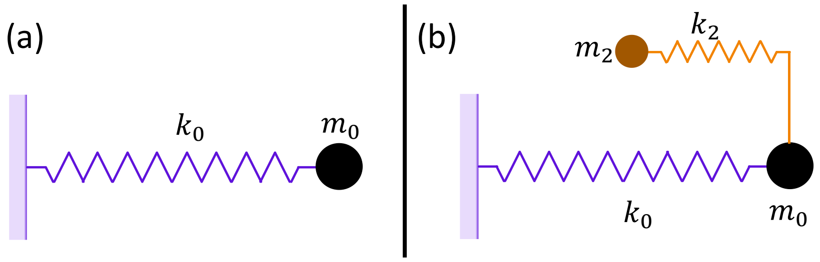

Figure 2.1 | Schémas pour les 2 systèmes.

Solution

(i)

Pulsation propre de chaque résonateur sont égales : $\alpha = 1$.

$$X_{1,orig} = \frac{1}{1-\beta^2} X_{1,s}$$

$$X_{1,Frahm} = \frac{(\beta^2 - 1)}{(\varepsilon\beta^2 - (\beta^2-1)^2)} X_{1,s}$$

$$\frac{X_{1,Frahm}}{X_{1,orig}} = \frac{(\beta^2-1)^2}{\varepsilon\beta^2 - (\beta^2-1)^2} = \frac{1}{\frac{\varepsilon\beta^2}{(\beta^2-1)^2} - 1} \leq \frac{1}{40}$$

$$Pour\ \beta^2 = 0.9 \to 41 \leq \frac{\varepsilon 0.9}{(0.1)^2} \to \epsilon \geq \frac{0.41}{0.9} \geq 0.455$$

$$Pour\ \beta^2 = 1.1 \to 41 \leq \frac{\varepsilon 1.1}{(0.1)^2} \to \epsilon \geq \frac{0.41}{1.1} \geq 0.372$$

(ii)

$$\frac{X_2^2}{X_{1,orig}^2} = \frac{(1-\beta^2)}{\varepsilon\beta^2 - (\beta^2-1)^2} = \frac{1}{4}$$

QUESTION 3 *(20 points)*

Dans le système *sans gravité* de la Figure 3.1 on a une barre de masse m et rigidité infinie, et deux masses ponctuelles $2m$ et m. Les structures sont reliées par des ressorts de rigidité k et $2k$. Si l'on considère les coordonnées dessinées dans la Figure 3.1 :

i) **Calculer les positions d'équilibre $x_{1,0}$, $x_{2,0}$, et $x_{3,0}$ si $F_1(t) = F_1$** .... **(3 pts)**

ii) **Écrire les équations de mouvement du système** .... **(7 pts)**

iii) **Calculer la matrice de rigidité, de masse, et d'amortissement.** .... **(3 pts)**

iv) **Calculer le vecteur de « force » ou d'excitation sur les coordonnées du système** ...... **(5 pts)**

v) **Est-ce que le système satisfait la condition de Caughey ?** .... **(2 pts)**

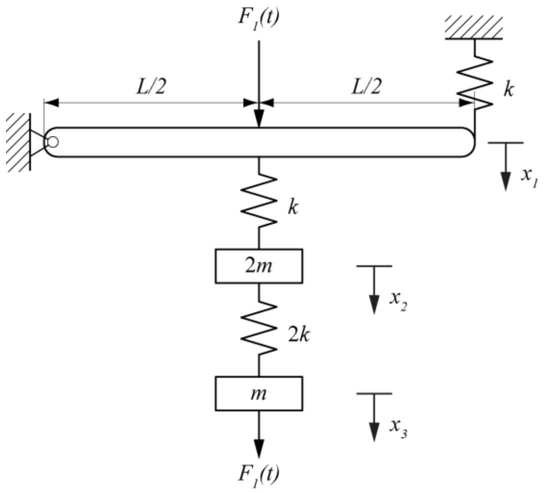

Figure 3.1 | Schéma du système.

Solution

(i)

$$\frac{m}{3}\ddot{x}_1 = \frac{F_1}{2} - kx_1 - \frac{k\left(\frac{x_1}{2} - x_2\right)}{2}$$
$$2m\ddot{x}_2 = k\left(\frac{x_1}{2} - x_2\right) + 2k(x_3 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_3 = F_1 - 2k(x_3 - x_2)$$

En statique :

$$0 = \frac{F_1}{2} - kx_1 + \frac{F_1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{F_1}{k}$$
$$F_1 = -k\left(\frac{x_1}{2} - x_2\right) \rightarrow x_2 = \frac{3F_1}{2k}$$
$$F_1 = 2k(x_3 - x_2) \rightarrow x_3 = \frac{5F_1}{4k}$$

(ii)

$$\frac{m}{3}\ddot{x}_1 + \frac{5}{4}kx_1 - \frac{k}{2}x_2 = \frac{F_1}{2}$$
$$2m\ddot{x}_2 - \frac{k}{2}x_1 + 3kx_2 - 2kx_3 = 0$$
$$m\ddot{x}_3 - 2kx_2 + 2kx_3 = F_1$$

(iii)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{m}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix};\quad K = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}k & -\frac{k}{2} & 0 \\ -\frac{k}{2} & 3k & -2k \\ 0 & -2k & 2k \end{pmatrix}; C = 0\ car\ conservatif$$

(iv)

$$F = \begin{pmatrix} \frac{F_1}{2} \\ 0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

(v) Système conservatif est toujours Caughey.

QUESTION 4 *(25 points)*

Le système de la Figure 4.1.a se compose d'une barre sans masse de rigidité en flexion EI et longueur L, et deux balles avec masses m_0.

i) Calculer la matrice de flexibilité et la matrice des masses du système.........................(5 pts)
ii) Combien des modes propres possède ce système ?..(2 pts)
iii) Calculer la matrice de rigidité du système..(3 pts)
iv) Déterminer les pulsations propres..(5 pts)
v) Déterminer les vecteurs propres. ....(5 pts)
vi) Si le système perd sa symétrie et la distribution des masses se trouve comme sur la Figure 4.1.b, calculer (approx) les nouvelles pulsations propres du système..........................(5 pts)

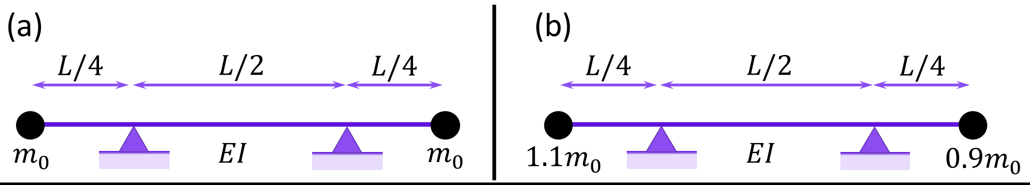

Figure 4.1 | Schéma des systèmes.

Solution

(i)

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \frac{w(de\ m_1)}{F(sur\ m_1)} = \frac{L^3}{64EI};\ \alpha_{12} = \frac{w(de\ m_2)}{F(sur\ m_1)} = \frac{L^3}{192EI};\alpha_{22} = \alpha_{11}\ par\ symmetrie$$

$$\alpha = \frac{L^3}{192EI}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = m_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) 2 modes propres

(iii)

$$K = \alpha^{-1} = \frac{24EI}{L^3}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(iv) Matrice noyeau :

$$A = M^{-1}K = \frac{24EI}{L^3 m_0}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \lambda_0\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = 0 = \det\left(\begin{pmatrix} 3\lambda_0 - \lambda & -\lambda_0 \\ -\lambda_0 & 3\lambda_0 - \lambda \end{pmatrix}\right) = (3\lambda_0 - \lambda)^2 - \lambda_0^2 = 0$$

$$3\lambda_0 - \lambda = \pm\lambda_0 \rightarrow \lambda_1 = 2\lambda_0; \lambda_2 = 4\lambda_0$$

$$\omega_1^2 = \frac{48EI}{L^3 m_0};\ \omega_2^2 = \frac{96EI}{L^3 m_0}$$

(v) Vecteurs propres :

$$A \cdot \vec{v_i} = \lambda_i \cdot \vec{v_i}$$

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2\lambda_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow 3a - b = 2a \rightarrow a = b \rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 4\lambda_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow 3a - b = 4a \rightarrow a = -b \rightarrow \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(vi) Méthode de Rayleigh :

$$\omega_{1,new}^2 = \frac{\vec{v_1}^T K \vec{v_1}}{\vec{v_1}^T M \vec{v_1}} = \lambda_0 \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \lambda_0 \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}} = \lambda_0 \frac{4}{2} = \omega_{1,old}^2$$

$$\omega_{2,new}^2 = \frac{\vec{v_2}^T K \vec{v_2}}{\vec{v_2}^T M \vec{v_2}} = \lambda_0 \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \lambda_0 \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.1 \\ -0.9 \end{pmatrix}} = \lambda_0 \frac{8}{2} = \omega_{2,old}^2$$

QUESTION 5 *(30 points)*

Le système de la Figure 5.1 se compose de 3 masses et 6 ressorts.

- **i) Combien de degrés de liberté trouve-t-on dans le système ?..(2 pts)**
- **ii) Calculer la matrice de rigidité et la matrice des masses du système ....(5 pts)**
- **iii) Déterminer les pulsations propres...(5 pts)**
- **iv) Déterminer les vecteurs propres. ....(5 pts)**
- **v) Si l'on tape avec un marteau sur la masse centrale avec une force $F(t) = F_0\delta(t)$, calculer la force effective sur chaque mode normal de vibration ....(3 pts)**
- **vi) Calculer le mouvement de chaque mode normal par rapport au temps.......................(6 pts)**
- **vii) Calculer le mouvement du système en coordonnées réelles (physiques)....................(4 pts)**

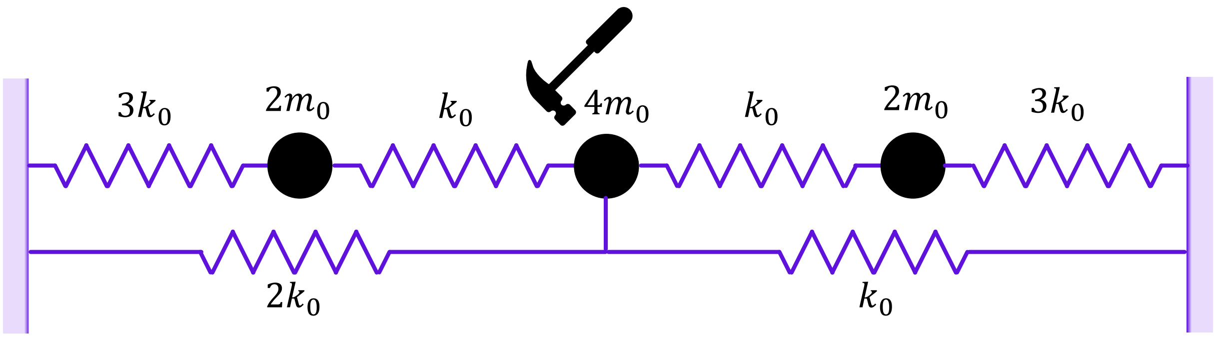

Figure 5.1 | Schéma du système, avec les 3 masses et les 6 ressorts.

Solution

(i) 3 DDL

(ii)

$$K = \begin{pmatrix} 4k_0 & -k_0 & 0 \\ -k_0 & 5k_0 & -k_0 \\ 0 & -k_0 & 4k_0 \end{pmatrix}; M = \begin{pmatrix} 2m_0 & 0 & 0 \\ 0 & 4m_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_0 \end{pmatrix}$$

(iii) Matrice noyeau :

$$A = M^{-1}K = \frac{k_0}{4m_0}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{k_0}{4m_0}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda_0 8 - \lambda & -\lambda_0 & 0 \\ -2\lambda_0 & 5\lambda_0 - \lambda & -2\lambda_0 \\ 0 & -\lambda_0 & 8\lambda_0 - \lambda \end{pmatrix}\right) = (8\lambda_0 - \lambda)^2(5\lambda_0 - \lambda) - 4\lambda_0^4(8\lambda_0 - \lambda)$$

$$(8\lambda_0 - \lambda) = 0$$

$$(8\lambda_0 - \lambda)(5\lambda_0 - \lambda) - 4\lambda_0^4 = 36\lambda_0^2 - 13\lambda_0\lambda + \lambda^2 = 0 \to \lambda = \frac{13\lambda_0 \pm \sqrt{169 - 144}\lambda_0}{2}$$

$$\to \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2}(13 + \sqrt{25})\lambda_0 = 9\lambda_0 \\ \lambda = \dfrac{1}{2}(13 - \sqrt{25})\lambda_0 = 4\lambda_0 \end{cases}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k_0}{m_0}; \omega_2^2 = 2\frac{k_0}{m_0}; \omega_3^2 = \frac{k_0}{m_0}\left(\frac{9}{4}\right)$$

(iv) Vecteurs propres :

$$A \cdot \vec{v_i} = \lambda_i \cdot \vec{v_i}$$

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \frac{k_0}{4m_0}\begin{pmatrix}8 & -2 & 0\\-1 & 5 & -1\\0 & -2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \frac{k_0}{m_0}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}8a-2b=4a\\-2b+8c=4c\end{matrix} \rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \frac{k_0}{4m_0}\begin{pmatrix}8 & -2 & 0\\-1 & 5 & -1\\0 & -2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \frac{k_0}{m_0}2\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}8a-2b=8a\\-a+5b-c=8b\end{matrix} \rightarrow \vec{v_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \frac{k_0}{4m_0}\begin{pmatrix}8 & -2 & 0\\-1 & 5 & -1\\0 & -2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \frac{k_0}{m_0}\frac{9}{4}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}8a-2b=9a\\-2b+8c=9c\end{matrix} \rightarrow \vec{v_3} = \begin{pmatrix}1\\-0.5\\1\end{pmatrix}$$

Matrice B :

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & -0.5\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(v) Force modale

$$\vec{f} = \begin{pmatrix}0\\F_0\delta(0)\\0\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{f_{modes}} = \boldsymbol{B^T}\vec{f} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & -0.5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\F_0\delta(0)\\0\end{pmatrix} = F_0\delta(0)\begin{pmatrix}2\\0\\-0.5\end{pmatrix}$$

(vi) Mouvement modale :

Matrice de masses :

$$\boldsymbol{M^0} = \boldsymbol{B^T M B} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & -0.5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2m_0 & 0 & 0\\0 & 4m_0 & 0\\0 & 0 & 2m_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & -0.5\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} = m_0\begin{pmatrix}20 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

Mode 1 :

$$q_1(t) = \frac{1}{m_1^0\omega_{0_1}}\left(\int_0^t f_1^0(t-\tau)\sin(\omega_{0_1}\tau)\ d\tau\right) = \frac{2F_0}{m_1^0\omega_{0_1}}\sin(\omega_{0_1}t) = \frac{F_0}{10m_0\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Mode 2 :

$$q_2(t) = 0$$

Mode 3 :

$$q_3(t) = \frac{1}{m_3^0\omega_{0_3}}\left(\int_0^t f_3^0(t-\tau)\sin(\omega_{0_3}\tau)\ d\tau\right) = -\frac{F_0}{10m_0\omega_{0_3}}\sin(\omega_{0_3}t) = -\frac{F_0}{15m_0\omega_0}\sin\left(\frac{3}{2}\omega_0 t\right)$$

(vii) Mouvement reel :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i q_i(t) = \frac{F_0}{10m_0\omega_0}\begin{pmatrix}\sin(\omega_0 t) - \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\omega_0 t\right)\\ 2\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\omega_0 t\right)\\ \sin(\omega_0 t) - \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\omega_0 t\right)\end{pmatrix}$$